اسم الطالب :
الدرجة : 100

امتحان مقرر الفيزياء للرياضيات لطلاب السنة الثالثة الدورة الفصلية الاولى 2017

السؤال الأول (20 درجة) :

باستخدام التوزع القانوني الكبير لجيبس. برهن أن توزع بوزة يعطى بالعلاقة الاتية :

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_a - \mu}{kT}} - 1}$$

السؤال الثاني (30 درجة) :

اختر احدى المجموعتين الاتيتين :

المجموعة الأولى:

ا- بفرض أن الكمون الترموديناميكي الكبير يعطى بالعلاقة الاتية $\gamma = U - TS - \mu\bar{N}$
بين كيف يمكن الحصول على المقادير الترموديناميكية الاتية

$$P = \left[\frac{\partial(PV)}{\partial V}\right]_{T\mu} \quad . \quad S = \left[\frac{\partial(PV)}{\partial T}\right]_{V\mu} . N = \left[\frac{\partial(PV)}{\partial \mu}\right]_{TV}$$

ب – بين فيما اذا كان موثر الزمن t وموثر الطاقة $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ يحقق خاصية التبادل أم لا .

المجموعة الثانية :

ا – ما هو احتمال وجود جسيم يتحرك في الاتجاه x في المجال $\left[x . 0 \to \frac{a}{2}\right]$ حيث أن الدالة الموجية له هي

$$\psi(x) = (\frac{2}{a})^{\frac{1}{2}} \sin\frac{2\pi x}{a}$$

ب – بين فيما اذا كانت الدالة $\emptyset(x.y.z) = sin2xsin3ysin4z$ هي دالة ذاتية للموثر

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

السؤال الثالث (30 درجة) :

أ – برهن أن تفرق متجه كثافة التدفق المغناطيسي يساوي الصفر .

ب – بفرض أن $\nabla X\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ برهن ان التكامل الخطي لكثافة التدفق المغناطيسي حول مسار مغلق يساوي حاصل ضرب μ_0 في التيار الكلي I المار بالسطح الذي تنطبق حوافه على ذلك المسار .

السؤال الرابع (20 درجة) :

استعن بمبرهنة غاوس لحساب الشحنة الكلية داخل مكعب طول ضلعه (2m) واحدى زواياه في نقطة الأصل واضلاعه موازية للمحاور المتعامدة ، علما أن متجه المجال الكهربائي هو $\vec{E} = 2ax^2\vec{i}$ (a ،كمية ثابتة) .

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح .

مدرس المقرر
د. فيصل مدغر

سلم تصحيح مادة الفيزياء للرياضيات

سنة ثالثة رياضيات فصل أول العام ٢٠١٧

السؤال الأول 20 درجة

ليكن احتمال وجود الجسم الجزيئي الذي يحتوي n جسيماً ويمتلك طاقة ε بالعلاقة الآتية:

$$W(\varepsilon,n)=\frac{\Omega(\varepsilon,n)\,e^{\frac{\mu n-\varepsilon}{KT}}}{\sum_{\varepsilon}\sum_{n}\Omega(\varepsilon,n)\,e^{\frac{\mu n-\varepsilon}{KT}}}$$

وبما أن جميع الجسيمات في الحالة α لها الطاقة نفسها ε_α فإن طاقة الجملة الجزيئية تتحدد بعدد الجسيمات n أي أن

$$\varepsilon=n\cdot\varepsilon_\alpha$$

وبما أن n جسيم من N امكانية تدخل في الجملة الجزيئية المدروسة، وبسبب عدم تمايز الجسيمات فإن هناك طريقة واحدة للجملة الجزيئية تتناسب مع أي مجموعة مؤلفة من n ذرة لذلك

$$\Omega(\varepsilon,n)=\Omega(n)=1$$

ومن هنا ينتج أن

$$W(\varepsilon,n)=W(n)=\frac{e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}n}}{\sum e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}n}}$$

وبالتالي فإن المجموع في المقام الأخير يكتب بالشكل الآتي

$$\Phi=\sum_n e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}n}$$

لذلك نجد العلاقة

$$\bar{n}=KT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_n e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}n}$$

أو نأخذ شكل مختصر بعد فرض أن

$$x=e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}}$$

$$\bar{n}=KT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_n x^n$$

لحساب المجموع $\sum_n x^n$ نجد أنه يتعلق بنوعية الجسيمات. فإذا كانت الجسيمات بوزية (بوزونات)

نعتبر أن عدد البوزونات في أي حالة غير محدود أي أن $n_{max}=N$ ،

فإذا كانت $N\gg1$ فإننا نعتبر في الحسابات أن $n_{max}=\infty$ (مع الأخذ بالاعتبار أن مجموع $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

سيكون متقارباً في حال كون $x\ll1$. وبما أن $\varepsilon_\alpha>0$ لذلك يجب أن يكون $\mu\leq0$.

إن المجموع اللانهائي في العلاقة السابقة لا يؤول إلا متتالية هندسية لا نهائية حدها الأول

1 وأساسها x وإن مجموعها يعطى بالعلاقة الآتية

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_\alpha}{KT}}}$$

ومن هنا نجد أن

$$\bar{n}_\alpha=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\alpha-\mu}{KT}}-1}$$

السؤال الثاني ٢٠ درجة

المجموعة الكبرى

أ -

$$\Psi = U - ST - \mu\bar{N} = -PV$$

اذن $PV = TS + \mu\bar{N} - E$ وان $U = E$.

وان $\bar{N}$ هو متوسط عدد الجسيمات في النظام (...) وباجراء التفاضل لـ PV نحصل

$$* \quad d(PV) = SdT + PdV + Nd\mu$$

لأنه من الثرموداينمك لدينا

$$dU = TdS - PdV + \mu d\bar{N}$$

$$d(PV) = (PdV + VdP) = TdS + SdT + \mu dN + Nd\mu - \underbrace{TdS + PdV - \mu d\bar{N}}_{dU}$$

وبالتالي من * نحصل

$$P = \left[\frac{\partial(PV)}{\partial V}\right]_{T,\mu}, \quad S = \left[\frac{\partial(PV)}{\partial T}\right]_{V,\mu}, \quad N = \left[\frac{\partial(PV)}{\partial \mu}\right]_{T,V}$$

ب -

$$[\hat{E}, \hat{t}]\psi = \hat{E}\hat{t}\psi - \hat{t}\hat{E}\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}t\psi - t\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi$$

$$i\hbar\left[t\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\right] - i\hbar t\frac{\partial}{\partial t} = i\hbar\psi$$

اذن $[\hat{E}, \hat{t}] = i\hbar$

أي عدم التبادل بين المؤثرين أي أنه لا توجد دالة ذاتية مشتركة بينهما للمؤثرين.

ج -

$$\int_0^{a/2}\psi\psi^* dt = \int_0^{a/2}\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\sin\frac{2\pi x}{a}\cdot\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}\sin\frac{2\pi x}{a}\,dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{a/2}\left(\sin\frac{2\pi x}{a}\right)^2 dx$$

$$= \frac{2}{a}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{a}{2\pi}\sin\frac{2(2\pi x)}{a}\right]_0^{a/2}$$

$$= \frac{2}{a}\left[\frac{a}{4} - \frac{1}{4}\frac{a}{2\pi}\sin\frac{4\pi a}{2a} - 0\right]$$

$$= \frac{2}{a}\cdot\frac{a}{4} = \frac{1}{2}$$

تابع سلم التصحيح مادة الفيزياء الرياضيات .

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x,y,z) = -4 \sin 2x \sin 3y \sin 4z = -4\Phi(x,y,z)$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\Phi(x,y,z) = -9 \sin 2x \sin 3y \sin 4z = -9\Phi(x,y,z)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Phi(x,y,z) = -16 \sin 2x \sin 3y \sin 4z = -16\Phi(x,y,z)$$

وعند جمع هذه المعادلات نحصل

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)\Phi(x,y,z) = -29\Phi(x,y,z)$$

اذن فان هذه الدالة هي دالة ذاتية للمؤثر والثابت هو -29 .

السؤال الثالث .. 30 درجة .

أ - للتعبير عن كثافة الفيض المغناطيسي $\vec{B}$ بواسطة دوران المتجه $\vec{A}$ ، وبالاستفادة من قانون بيوت سافار الذي يكتب على الشكل .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\vec{l} \times \left(-\nabla \frac{1}{r}\right)$$

اذا ما عوضنا عن الكمية المتجهة $\frac{\vec{r}}{r^3}$ بالكمية المساوية لها نجد ان $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$

وبالتالي

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times \int \frac{I\, d\vec{l}}{r}$$

واذا فرضنا ان $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_c \frac{d\vec{l}}{r}$ بالتعويض $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

وبما ان $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ اذن فان

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 .$$

ب -

ان

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_s \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_s \mu_0 \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

وبما ان $I = \int_s J\, ds$ اذن

$$\oint_c B\, dl = \mu_0 I .$$

٤ (٢ درجة)

نفرض q هي الشحنة الكلية داخل المكعب فحسب قانون كاوس يكون

$$\oint_s E \cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وباستخدام نظرية الانفراج

$$\oint_s E \cdot ds = \int \nabla E \cdot d\tau = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

وبما أن

$$\nabla E = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 4ax$$

$$\int \nabla \vec{E} \cdot d\tau = \int_\tau 4ax\, d\tau = 4a \int_0^2 x\,dx \int_0^2 dy \int_0^2 dz$$

$$= 16a \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 32a \Rightarrow$$

$$q = 32 \varepsilon_0 a$$

مدرس المادة

د. [illegible]

١٦/٤/٢٠١٤